Ασκήσεις Επανάληψης 2016/2017

Άσκηση 1: Έστω η τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha(1-x^2), & -1\le x\le 1\\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases},\ \alpha>0.$$ Θεμα 2010

α) Να υπολογισθεί η σταθερά α και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής F_X της X.
β) Να υπολογισθούν με τη χρήση της $f_X(x)$ η πιθανότητα $P(X>0)$ και με τη χρήση της F_X η πιθανότητα $P\left(-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\right)$. Να υπολογισθεί η δεσμευμένη πιθανότητα $P\left(X>-\frac{1}{2}\mid X<\frac{1}{2}\right)$ και να εξετασθεί αν είναι ανεξάρτητα τα ενδεχόμενα $A=\{X>0\}$ και $B=\left\{-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\right\}$. γ) Να υπολογισθεί η $E(X)$.

Άσκηση 2: (α) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ) της τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) X δίνεται από την σχέση,
$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ \dfrac{(x+1)^2}{2}, & -1<x<0\\ \dfrac{1}{2}+x-\dfrac{x^2}{2}, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$ Θεμα 2016

(i) Ποιες ιδιότητες πρέπει να ικανοποιεί η F_X ώστε να είναι πράγματι α.σ.κ.;
(ii) Να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της τ.μ. X.
(iii) Να υπολογισθεί η πιθανότητα $P\left(|X|\le\frac{1}{2}\right)$ με τη χρήση της α.σ.κ. και η πιθανότητα $P\left(0<X\le\frac{3}{2}\right)$ με τη χρήση της σ.π.π.
(iv) Να υπολογισθεί η αναμενόμενη τιμή της τ.μ. X.
(β) Η σ.π.π. της τ.μ. X είναι $f_X(x)=\begin{cases}x^2/9, & 0\le x\le 3\\ 0, & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}.\end{cases}$. Να προσδιορισθεί και να αναγνωρισθεί η κατανομή της τ.μ. $Y=X^3$.

Άσκηση 3: (α) N μπάλες, αριθμημένες από το 1 έως το N, τοποθετούνται η μία μετά την άλλη σε γραμμή. (i) Να υπολογισθεί η πιθανότητα οι μπάλες με αριθμούς 1 και N να τοποθετηθούν η μία δίπλα στην άλλη. (ii) Να υπολογισθεί η πιθανότητα οι μπάλες με αριθμούς 1 και N να τοποθετηθούν η μία στο ένα άκρο και η άλλη στο άλλο άκρο.
(β) m διακεκριμένες μπάλες, αριθμημένες από το 1 έως το m (με m>7), τοποθετούνται στην τύχη και ανεξάρτητα η μία από την άλλη σε N κουτιά (m<N) τα οποία είναι τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο. Ποια η πιθανότητα όλες οι μπάλες να τοποθετηθούν σε διαδοχικά κουτιά και επιπλέον οι μπάλες με τους αριθμούς 1, 3 και 7 να βρίσκονται και αυτές, με τη σειρά αυτή, σε διαδοχικά κουτιά.
(γ) Η διαδικασία τοποθέτησης των μπαλών, που περιγράφεται στο ερώτημα (β), επαναλαμβάνεται και έστω N=10 και m=8. (i) Αν η διαδικασία επαναληφθεί 5 φορές, πόσες φορές αναμένεται όλες οι μπάλες να τοποθετηθούν σε διαδοχικά κουτιά και επιπλέον οι μπάλες

με τους αριθμούς 1, 3 και 7 να βρίσκονται και αυτές, με τη σειρά αυτή, σε διαδοχικά κουτιά; (ii) Ποια η πιθανότητα να χρειαστεί να επαναληφθεί η διαδικασία αυτή 6 φορές μέχρις ότου για $2^η$ φορά όλες οι μπάλες να τοποθετηθούν σε διαδοχικά κουτιά και επιπλέον οι μπάλες με τους αριθμούς 1, 3 και 7 να βρίσκονται και αυτές, με τη σειρά αυτή, σε διαδοχικά κουτιά;

Άσκηση 4: (α) Ένας κατασκευαστής επίπλων χρησιμοποιεί ένα ελαστικό υλικό (π.χ. καουτσούκ) σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου για την κατασκευή ενός καναπέ. Γνωρίζει επίσης ότι ένα άτομο κάθεται αναπαυτικά στον καναπέ αν το ελαστικό υλικό έχει αρκετό ύψος ώστε να μην συμπιέζεται εντελώς. Από την εμπειρία του έχει διαπιστώσει, ο κατασκευαστής, ότι το ελαστικό υλικό συμπιέζεται κατά ένα ύψος το οποίο περιγράφεται από την κατανομή γάμμα με μέση τιμή 5 εκατοστά και τυπική απόκλιση 5 εκατοστά, όταν ένα άτομο κάθεται στον καναπέ. Είναι επίσης γνωστό ότι αν καθίσουν τρείς άνθρωποι στον καναπέ, ο ένας μετά τον άλλο και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, η πιθανότητα να κάθονται και οι τρείς αναπαυτικά και να μην συμπιεσθεί εντελώς το ελαστικό υλικό, είναι 1/8. Με βάση τα δεδομένα αυτά ποιο τουλάχιστον πρέπει να είναι το ύψος του ελαστικού υλικού που θα χρησιμοποιήσει ο κατασκευαστής; (Δίνεται: $\ln(0,5) = -0,693$).
(β) Το 35% των ασκήσεων τις οποίες διατυπώνει ένας καθηγητής στις εξετάσεις χαρακτηρίζονται δύσκολες και οι υπόλοιπες εύκολες. Το 15% των φοιτητών απαντά σωστά σε μια δύσκολη άσκηση και το 70% των φοιτητών απαντά σωστά σε μια εύκολη άσκηση. Αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε μια άσκηση, ποια η πιθανότητα να είναι δύσκολη;

Άσκηση 5: (α) Ο αριθμός των πελατών που φτάνουν σ' ένα Κέντρο Εξυπηρέτησης Πελατών (ΚΕΠ) για να εξυπηρετηθούν, από τις 8 έως τις 12 η ώρα το πρωί, περιγράφεται από την Poisson κατανομή με μέση τιμή 2 πελάτες ανά πέντε λεπτά. (i) Ποια η πιθανότητα κατά τις επόμενες τρεις ημέρες να φτάσει συνολικά ένας πελάτης στο ΚΕΠ από τις 09:10 έως 09:20 το πρωί. (ii) Ο μοναδικός υπάλληλος του ΚΕΠ, αφού εξυπηρετήσει έναν πελάτη, επειδή δεν υπάρχει άλλος πελάτης για εξυπηρέτηση, πηγαίνει στο κυλικείο. Επιστρέφει στο γραφείο του με την άφιξη του επόμενου πελάτη. Ποια η πιθανότητα ο χρόνος απουσίας του υπαλλήλου να είναι μικρότερος από 5 λεπτά. (iii) Αν κάποια στιγμή δεν υπάρχει πελάτης για εξυπηρέτηση στο ΚΕΠ, ποια η πιθανότητα ο χρόνος που απαιτείται για την άφιξη των τριών πρώτων πελατών να είναι μεγαλύτερος από 5 λεπτά. (Δεν απαιτείται λεπτομερής υπολογισμός της πιθανότητας του ερωτήματος (iii)). (Δίνεται: e^{-2}=0.1353).
(β) Αν $X \sim N(70, 144)$, να υπολογισθούν οι πιθανότητες: $P(X < 90)$ και $P(70 \leq X < 92)$.